

École des Ponts
ParisTech

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Géométrie différentielle et riemannienne

Projet de recherche du Semestre 2

Par

*Vincent BOULARD, Alexandre DUCORROY, Pablo LARRIEU, Abel
SALMONA, Charles VIELZEUF*

Ce projet a été effectué sous la supervision de

Éric CANCES

Table des matières

1	Introduction	2
2	Description mathématique	3
2.1	Variétés	3
2.2	Applications et champs sur les variétés	4
2.2.1	Applications lisses	4
2.2.2	Espaces tangents et cotangents	5
2.2.3	Champs vectoriels et tensoriels	6
2.2.4	Différentielle d'une fonction lisse	7
2.3	Métrie	7
2.4	Connexions	8
2.5	Courbure	9
3	Mouvement autour d'un trou noir	11
3.1	Introduction	11
3.2	Modélisation mathématique	11
3.2.1	Contexte géométrique	11
3.2.2	Ligne d'univers	11
3.2.3	Contenu de l'espace temps	11
3.2.4	Équation d'Einstein	12
3.2.5	Résolution de l'équation d'Einstein	12
3.2.6	Expression des symboles de Christoffel	13
3.3	Simulations numérique	13
3.3.1	Trajectoires autour d'un trou noir	13
3.4	Conclusion	14
4	Annexes	15

ABSTRACT : This article delves into the intricate mathematics underlying the theory of general relativity. The fundamental concepts of manifolds and the necessary tools for performing differential calculus on them are initially recalled. Subsequently, the notions of Riemannian manifolds, connections, and curvature tensors are presented. We learn that distances are altered by the presence of curvature. By exploring these mathematical foundations, we deepen our understanding of the profound interplay between geometry and gravity in general relativity. Thanks to this mathematical model we will solve the geodesic differential equations with python libraries to compute some geodesics of objects and lightrays around a blackhole. We will also appreciate the computation of time dilatation near the event horizon.

1 Introduction

Il est courant en mathématiques ou en physique d’avoir besoin de faire du calcul différentiel ou du calcul intégral sur des sous-parties de \mathbb{R}^n qui ne sont pas des ouverts et qui sont bien décrites par $p < n$ paramètres. On peut penser aux distributions linéiques et surfaciques de charges en électromagnétisme ou à une fine couche de fluide qui s’écoulerait sur une surface de l’espace.

Alors se pose la question suivante : comment généraliser les notions *géométriques* que l’on utilise dans les espaces euclidiens à ces structures communément appelées **variétés** ? La géométrie différentielle est la réponse théorique à cette question. Elle s’attarde à décrire ces structures d’un point de vue dit *intrinsèque* qui s’oppose la description *extrinsèque* consistant à décrire notre variété comme une sous-partie d’un espace ambiant plus grand.

Ce projet, réalisé par deux groupes, a pour principal objectif d’aborder la géométrie différentielle. La première partie, commune aux deux groupes, présente le formalisme de cette discipline. Ensuite, chaque groupe explore une application de celle-ci :

- La mécanique lagrangienne sur les variétés en prenant des exemples de systèmes dynamiques concrets. (*Vincent Boulard, Pablo Larrieu, Abel Salmona*)
- La relativité générale en regardant le mouvement d’un corps au voisinage d’un trou noir. (*Alexandre Ducorroy, Charles Vielzeuf*)

Nous tenons à remercier particulièrement Éric Cances notre tuteur, qui nous a aidé tout au long de notre projet, en nous guidant via d’excellentes ressources et en répondant à toute nos interrogations. Il nous a fait confiance du début jusqu’à la fin, sans lui rien de tout cela n’aurait été possible.

2 Description mathématique

2.1 Variétés

L'introduction des variétés est motivée par l'envie de décrire des espaces de dimension n qui ne sont pas dotés d'une structure d'espace vectoriel. Il n'est donc pas possible de munir directement ces espaces d'un produit scalaire permettant de mesurer distances et angles. Nous cherchons donc à définir une telle structure mathématique qui permette de faire le lien entre cette structure et des espaces euclidiens. Pour cela on va identifier les ouverts de la variété avec des ouverts de \mathbb{R}^n .

Soit \mathcal{M} un espace topologique séparé à base dénombrable, \mathcal{M} est une variété de dimension n si pour tout point $p \in \mathcal{M}$, il existe un ouvert $U \subset \mathcal{M}$ contenant p , un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme $\varphi : \begin{matrix} U & \rightarrow & V \\ x & \mapsto & (x^1, \dots, x^n) \end{matrix}$ où (x^1, \dots, x^n) est un système de coordonnées locales [1].

Le couple (U, φ) est appelé **carte** autour de p car il nous permet de nous repérer sur un voisinage de p à l'aide n coordonnées locales.

Dans la suite, l'objectif est de pouvoir effectuer du calcul différentiel sur ces variétés ; Mettons que l'on travaille sur un sous espace de la variété, ne pouvant être recouvert par une unique carte : il nous faut donc des conditions de régularité sur nos coordonnées. Soient (U_1, φ_1) et (U_2, φ_2) deux cartes de \mathcal{M} dont les domaines s'intersectent ; on pose alors $h_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ qu'on appelle **changement de carte**. Les applications de ce type correspondent à des changements de système de coordonnées locales. On leur demande alors d'être C^∞ et on dit que la variété \mathcal{M} est **lisse**.

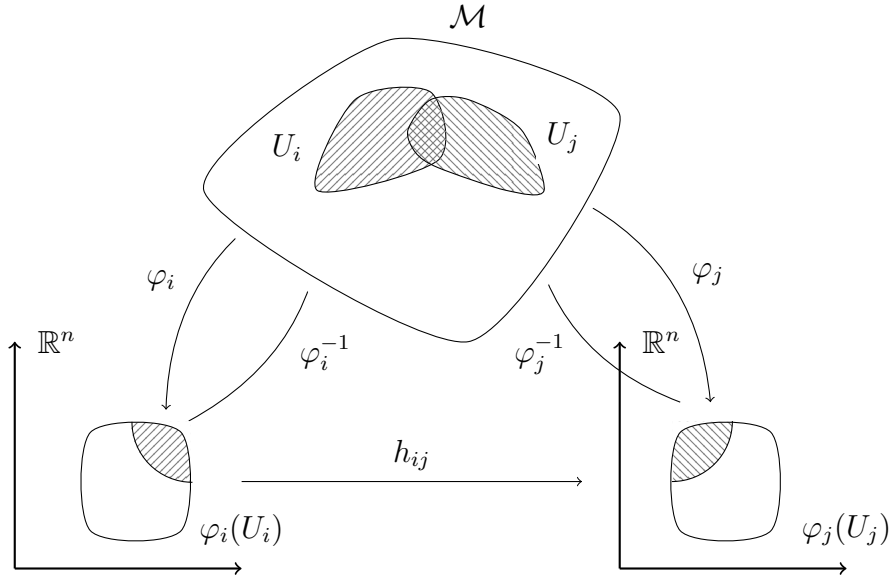


FIGURE 1 – Cartes sur une variété

Pour bien comprendre le formalisme, voici quelques exemples. Commençons par paramétrer une surface de \mathbb{R}^3 de la manière suivante (avec $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ lisse, c'est-à-dire C^∞ et $V \subset \mathbb{R}^2$ ouvert) :

$$\mathcal{S} = \{ (x, y, h(x, y)) ; (x, y) \in V \}$$

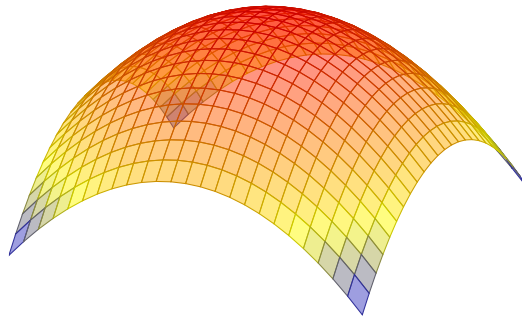


FIGURE 2 – Exemple de variété paramétrée par $h : (x, y) \mapsto -(x^2 + y^2)$

\mathcal{S} est donc le graphe d'une fonction continue à deux variables. Avec les conditions imposées sur h , l'application $\varphi : \begin{matrix} \mathcal{S} & \rightarrow & V \\ (x, y, h(x, y)) & \mapsto & (x, y) \end{matrix}$ définit une carte globale et confère à \mathcal{S} une structure de variété lisse de dimension 2.

Il existe bien sûr d'autres variétés qui ne se représentent pas ainsi, mais il est à noter qu'on peut toujours le faire localement.

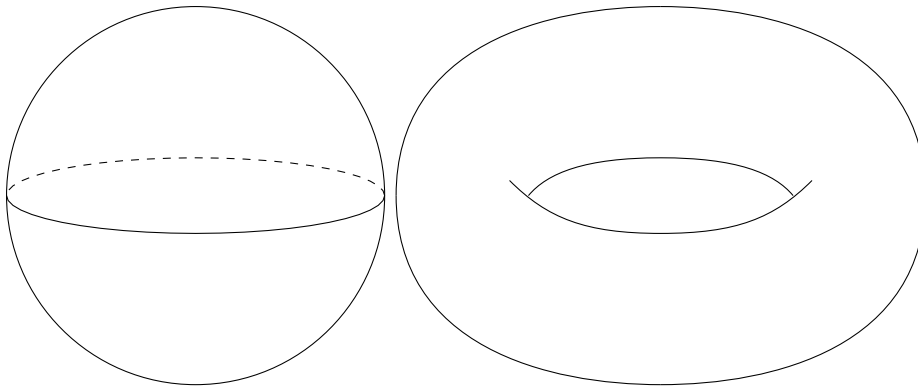


FIGURE 3 – Autres exemples de variétés à 2 dimensions : Sphère et Tore

2.2 Applications et champs sur les variétés

Maintenant que les variétés sont définies, on cherche à y faire du calcul différentiel et intégral. On peut par exemple penser au calcul du champ électromagnétique engendré par une densité de charge répartie sur une surface. Cette surface est une variété, la distribution de charge est représentée par un champ scalaire défini sur la variété. On s'intéresse ensuite à des intégrales de la distribution de charges sur la variété.

Il est aussi possible d'étudier le mouvement d'un objet sur une variété et donc calculer des vecteurs vitesses sur cette variété et cela nécessite de définir des champs de vecteurs.

En relativité la densité d'énergie et d'impulsion est représenté en chaque point par un tenseur.

2.2.1 Applications lisses

Afin d'effectuer du calcul différentiel sur les variétés, il est nécessaire de posséder des applications régulières, dans le cadre de ce projet, nous nous concentrerons sur des applications lisses, c'est-à-dire \mathcal{C}^∞ . Soient \mathcal{M} , \mathcal{N} deux variétés lisses et $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$. On dit que f est lisse si pour tout $p \in \mathcal{M}$ il existe (U, φ) une carte locale autour de p et (V, ψ) une carte locale autour

de $f(p)$ telles que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ soit lisse. Autrement dit on veut que l'expression en coordonnées de f soit lisse. Voici quelques exemples :

- N'importe quelle application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ qui est C^∞ .
- L'application $g : z \mapsto z^2$ définie sur \mathbb{S}^1 (le cercle unité de \mathbb{C}) à valeur dans \mathbb{S}^1 . En effet en considérant une coordonnée angulaire θ , on voit bien que $g(\theta) = 2\theta$ et donc l'application est lisse.¹

On notera $C^\infty(\mathcal{M})$ l'espace des fonctions lisses sur \mathcal{M} qui est l'espace vectoriel des applications lisses définies sur \mathcal{M} à valeur dans \mathbb{R} [1].

2.2.2 Espaces tangents et cotangents

Travailler sur des variétés implique de perdre la notion de "vecteur position", toutefois on garde celle de "vecteur vitesse". Pour cela il nous faut construire le concept d'espace tangent. Par exemple, si l'on considère \mathbb{S}^2 la sphère unité de \mathbb{R}^3 il est clair qu'en chaque point de celle-ci on peut tracer un plan qui lui est tangent.

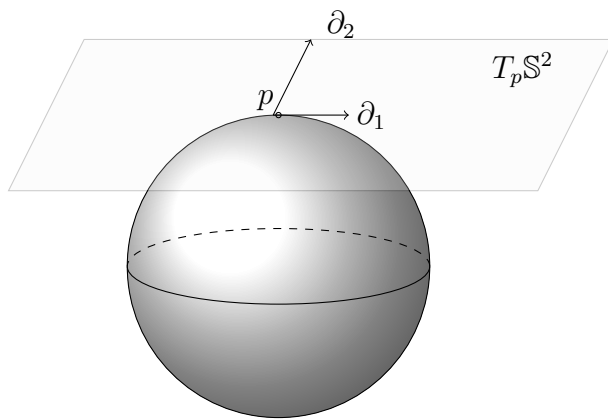


FIGURE 4 – Sphère et son plan tangent en $p = (0, 0, 1)$

Analytiquement, n'importe quel vecteur v du plan tangent au point $p \in \mathbb{S}^2$ est de la forme $\gamma'(0)$ avec $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{S}^2$ lisse et tel que $\gamma(0) = p$, c'est avec cette idée que nous allons construire la notion d'espace tangent en un point d'une variété \mathcal{M} .

Soit $p \in \mathcal{M}$, on définit une relation d'équivalence sur les courbes lisses à valeur dans \mathcal{M} et définies sur un voisinage de 0 :

$$\gamma \sim \alpha \iff \alpha(0) = \gamma(0) = p \text{ et } (\varphi \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \alpha)'(0) \text{ pour toute carte } (U, \varphi) \text{ telle que } p \in U$$

On appelle alors espace tangent en p l'ensemble des classes d'équivalence de cette relation et on le note $T_p \mathcal{M}$. On peut alors le munir d'une structure d'espace vectoriel et on peut montrer que $\dim T_p \mathcal{M} = \dim \mathcal{M}$. N'importe quelle carte (U, φ) dont le domaine contient p nous donne alors une base de $T_p \mathcal{M}$ notée $(\partial_{1|p}, \dots, \partial_{n|p})$ (on pose $n = \dim \mathcal{M}$) où $\partial_{i|p}$ est la classe d'équivalence de la courbe $t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(p) + te_i)$ (avec e_i le i -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n).

On note alors indifféremment $\gamma'(0)$, $\dot{\gamma}(0)$, $\frac{d\gamma}{dt}(0)$ la classe d'équivalence de la courbe $t \mapsto \gamma(t)$ qu'on appelle la **dérivée** de γ en $t = 0$, qui est donc un vecteur tangent en p comme on s'y attendrait d'un point de vue extrinsèque. On définit de même la dérivée d'une courbe lisse

1. Ici on a utilisé un abus de notation classique en géométrie différentiel, si l'on note φ la carte associée à notre coordonnée, on a en réalité écrit $\varphi(g(\varphi^{-1}(\theta))) = 2\theta$.

$\gamma :]a, b[\rightarrow \mathcal{M}$ et on a pour tout $t \in]a, b[$, $\gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t) = \dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$.

On peut aussi définir la notion de dérivée directionnelle d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ au point p . Soit $v \in T_p\mathcal{M}$ et γ une courbe dans la classe d'équivalence de v , on définit alors la dérivée selon v de la manière suivante $vf = (f \circ \gamma)'(0)$, en utilisant un système de coordonnées on a $v = v^i \partial_{i|p}$ et $vf = v^i \partial_{i|p} f$.

Les fonctions $\partial_i f : p \mapsto \partial_{i|p} f$ définies sur U sont appelés dérivées partielles de f dans le système de coordonnées choisi. Dans la suite on verra comment représenter les variations d'une fonction lisse de manière intrinsèque, c'est-à-dire sans faire appel à un système de coordonnées.

Pour cela nous aurons besoin des espaces cotangents notés $T_p^*\mathcal{M}$ qui sont simplement les duaux des espaces tangents et sans plus de précisions pour l'instant on notera $(dx_{|p}^i)$ la base duale de $(\partial_{i|p})$, ainsi on a $dx_{|p}^i(\partial_{j|p}) = \delta_j^i$ [2].

2.2.3 Champs vectoriels et tensoriels

On souhaite à présent définir une application qui en chaque point $p \in \mathcal{M}$ associe un vecteur de $T_p\mathcal{M}$. Pour trouver l'espace d'arrivée de cette application on est amené à construire le fibré tangent $T\mathcal{M} = \bigsqcup_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$, qu'on peut munir d'une structure de variété lisse de dimension $2n$. Ainsi un **champ de vecteurs** sur \mathcal{M} est une application lisse de $X : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$ telle que $X_p \in T_p\mathcal{M}$ pour tout $p \in \mathcal{M}$ (où X_p est l'image par X de p). Pour décrire un champ de vecteurs d'un point de vue pratique, on se donne une carte (U, φ) et on a $X_p = X^i(p) \partial_{i|p}$ où les X^i sont des fonctions lisses définies sur U appelées composantes de X dans la carte locale. Ainsi les ∂_i sont des champs de vecteurs définis localement et on écrira $X = X^i \partial_i$. On notera $\Gamma(\mathcal{M})$ l'espace des champs de vecteurs lisses sur \mathcal{M} [2].

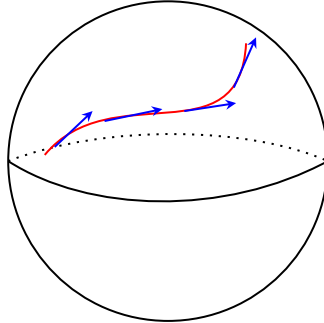


FIGURE 5 – Champ de vecteurs sur \mathbb{S}^2

Pour généraliser la notion de champ de tenseurs aux variétés on procède de manière analogue. Pour chaque espace tangent on a l'espace $T_l^k(T_p\mathcal{M})$ des tenseurs mixtes k fois covariants et l -fois contravariants (tenseurs de type (k, l)), puis on construit le fibré tensoriel associé $TT_l^k\mathcal{M} = \bigsqcup_{p \in \mathcal{M}} T_l^k(T_p\mathcal{M})$. Un champ de tenseurs de type (k, l) est alors une application lisse $A : \mathcal{M} \rightarrow TT_l^k\mathcal{M}$, on peut alors définir le produit tensoriel de champ de tenseurs de manière ponctuelle. Localement un champ de tenseurs est décrit de la manière suivante $A = A_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_k} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_l}$ où de manière analogue que pour les champs de vecteurs, les $A_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l}$ sont lisses et sont appelées composantes de A dans notre repère local.

2. On a utilisé la convention de sommation d'Einstein $v^i \partial_i = \sum_{i=1}^n v^i \partial_i$, on l'utilisera dans la suite du texte pour chaque expression où un indice apparaît exactement 2 fois, une fois en position basse et une fois en position haute.

Soit X_1, \dots, X_k des champs de vecteurs lisses et $\omega^1, \dots, \omega^l$ des champs de tenseurs 1 fois covariants. On peut alors construire une fonction lisse de la manière suivante

$$A(X_1, \dots, X_k, \omega^1, \dots, \omega^l) : p \mapsto A_p(X_{1|p}, \dots, X_{k|p}, \omega_{1|p}^1, \dots, \omega_{l|p}^l)$$

En coordonnées, cette fonction s'écrit

$$A(X_1, \dots, X_k, \omega^1, \dots, \omega^l) = A_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_l} X_1^{j_1} \dots X_k^{j_k} \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_l}^l$$

En pratique on travaillera toujours avec une représentation locale [1]. Ces champs sont d'une grande utilité en physique, par exemple on sait qu'en mécanique des milieux continus, les efforts intérieurs et les déformations sont représentés en chaque point par des tenseurs d'ordre deux.

2.2.4 Différentielle d'une fonction lisse

Un cas particulièrement important de champ de tenseurs est celui des champs de covecteurs, c'est-à-dire des tenseurs 1 fois covariant, car on sait que pour $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ les variations à l'ordre un de g en chaque point sont représentées par une forme linéaire. Autrement dit pour généraliser la notion de différentielle aux variétés, il faut utiliser des champs de covecteurs.

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty$. On définit df la différentielle de f comme le champ de covecteurs qui pour tout $p \in \mathcal{M}$ vaut $df_p(v) = v f$ avec $v \in T_p \mathcal{M}$. En coordonnées, cela donne $df_p(v) = v_i \partial_i f(p) = dx_p^i(v) \partial_i f(p)$ et on retrouve bien l'expression usuelle de la différentielle d'une fonction $df = \partial_i f dx^i$ ³. Par exemple sur la sphère centrée à l'origine de rayon r , s'il on note z la fonction qui à un point associe sa composante selon l'axe (Oz) , alors cette application s'écrit en coordonnées sphérique $z(\theta, \varphi) = r \cos(\theta)$ et ainsi on a bien $dz = -r \sin(\theta) d\theta$.

2.3 Métrique

Dans un espace euclidien, la mesure des longueurs est des angles passe par un produit scalaire. La variété n'est pas dotée d'une structure d'espace vectoriel mais les espaces tangents le sont. On peut donc définir une application qui en chaque point associe un produit scalaire : **la métrique**. La métrique notée habituellement g est donc un champ de tenseurs lisse covariant d'ordre 2 qui est défini positif en chaque point. Ainsi pour tout $p \in \mathcal{M}$, $g_p : T_p \mathcal{M} \times T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire et les applications $p \mapsto g_{ij}(p) = g(\partial_{i|p}, \partial_{j|p})$ sont lisses. Lorsque \mathcal{M} est muni d'une métrique, le couple (\mathcal{M}, g) est appelé **variété riemannienne**. La métrique est ainsi l'outil idéal pour mesurer des distances et des angles sur les variétés. Pour mesurer la longueur d'une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$ par exemple, la métrique nous permet de mesurer la norme du vecteur vitesse à chaque instant $\|\dot{\gamma}(t)\|_g = \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}$ et cela nous permet de trouver la longueur totale de la courbe par intégration :

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_g dt \quad (1)$$

Il peut être utile dans certains cas d'étude de disposer d'une **métrique pseudo riemannienne** qui est un tenseur covariant d'ordre 2 qui est symétrique et non dégénérée en chaque point [3].

On dit que la **signature** de la métrique est $(s_i)_{i=1}^n$ avec $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $s_i \in \{+, -\}$ si pour tout

3. On remarque alors que la différentielle en p de la fonction x_i correspond bien au i -ème covecteur de la base duale de $(\partial_{k|p})$ et cela justifie bien notre notation.

$p \in \mathcal{M}$, il existe une base (E_i) de $T_p\mathcal{M}$ telle que pour tout $u = u^i E_i$, $v = v^i E_i \in T_p\mathcal{M}$, $g(u, v) = \sum_{i=1}^n s_i u^i v^i$ [4].

2.4 Connexions

Maintenant que l'on sait calculer des distances, généralisons la notion de ligne droite sur une variété. Dans un espace euclidien, il est clair qu'une courbe γ est un segment de droite si et seulement si $\ddot{\gamma} = 0$. Il est possible de généraliser cela à une variété. Pour se faire, il faut d'abord définir un outil qui permette de faire le lien entre les espaces tangents car $\dot{\gamma}(t)$ et $\dot{\gamma}(t + \delta t)$ vivent dans deux espaces différents. Imaginons un objet dont le déplacement est restreint à une surface de \mathbb{R}^3 . Cet objet possède une accélération dans \mathbb{R}^3 et il est possible de la projeter orthogonalement sur les plans tangents. Pour cela définissons un opérateur appelé **connexion**

$$\nabla : \begin{array}{ccc} \Gamma(\mathcal{M}) \times \Gamma(\mathcal{M}) & \rightarrow & \Gamma(\mathcal{M}) \\ (X, Y) & \mapsto & \nabla_X Y \end{array}$$

tel que ∇ est \mathcal{C}^∞ linéaire en la première variable, \mathbb{R} linéaire en la deuxième variable et vérifie la règle de Leibniz sur deuxième variable, c'est-à-dire $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$ pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$.

L'évaluation de la connexion en un point $p \in \mathcal{M}$ nécessite la connaissance de X en p et de Y autour p . Cela se rapproche de ce que l'on connaît de la dérivation qui nécessite de connaître la fonction au voisinage d'un point, l'idée étant ici de dériver Y dans la direction X_p .

Lorsque dans une carte locale on évalue la connexion sur les champs de vecteurs ∂_i, ∂_j , on obtient $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$. Les n^3 fonctions Γ_{ij}^k sont appelées les **symboles de Christoffel** et ils caractérisent entièrement la connexion. Ainsi, si l'on a $X = X^i \partial_i$ et $Y = Y^j \partial_j$, il s'en suit que

$$\nabla_X Y = (Y^i \partial_i X^k + Y^i X^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k \quad (2)$$

Maintenant si l'on travaille sur une variété riemannienne on peut montrer qu'il existe une unique connexion ∇ telle que

$$\forall X, Y, Z \in \Gamma(\mathcal{M}), \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0 \text{ et } Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

Cette connexion est la **connexion de Levi-Civita** et c'est celle-ci que l'on utilisera sur (\mathcal{M}, g) . Avec cette connexion on a l'expression suivante des coefficients de Christoffel (où (g^{lk}) est la matrice inverse de (g_{ij}))

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \quad (3)$$

Reste à généraliser la notion d'accélération nulle. Pour cela on se donne $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathcal{M}$ une courbe lisse que l'on décompose comme $\gamma(t) = x^i(t) \partial_i|_{\gamma(t)}$. On appelle champ de vecteurs le long de γ toute application lisse $V :]a, b[\rightarrow T_p\mathcal{M}$ telle que $V(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$ pour tout $t \in]a, b[$. En s'inspirant de l'expression en coordonnées de la connexion, on définit alors la **dérivée covariante** de V ainsi

$$D_t V(t_0) = (\dot{V}^k(t_0) + V^j(t_0) \dot{\gamma}^i(t_0) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t_0))) \partial_k|_{\gamma(t_0)} \quad (4)$$

cette expression est en réalité indépendante du système de coordonnées [3]. Remarquons que pour tout $X \in \Gamma(\mathcal{M})$ on peut le "retrouver" à un champ de vecteur le long de γ et dans ce cas on obtient $D_t X(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)} X$. On peut alors définir l'**accélération covariante** de γ comme

$D_t\dot{\gamma}$. Avec ces définitions, si l'on se donne une surface de \mathbb{R}^3 munie de la métrique induite, l'accélération covariante d'une courbe correspond à la projection orthogonale sur le plan tangent de son accélération euclidienne !

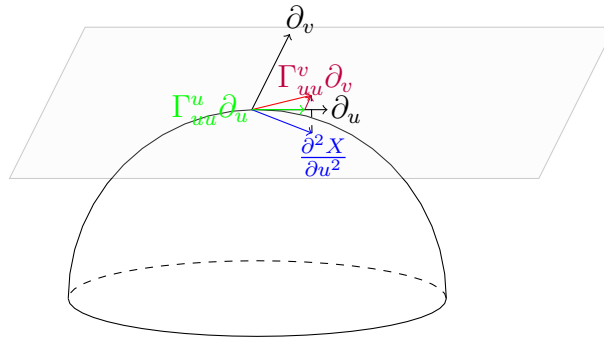


FIGURE 6 – Visualisation des symboles de Christoffel avec $X(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$

Ainsi avec cette nouvelle notion d'accélération, on peut enfin définir nos "lignes droites" qui sont appelées **géodésiques**. Ce sont les courbes γ tels que $D_t\dot{\gamma} = 0$ identiquement. En coordonnées cela équivaut à ce qu'on appelle l'**équation des géodésiques** [2] ($\forall k \in \{1, \dots, n\}$)

$$\ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = 0 \tag{5}$$

2.5 Courbure

Il est fréquent que la double dérivée covariante ne commute pas i.e $\nabla_X\nabla_Y Z \neq \nabla_Y\nabla_X Z$, le tenseur de courbure permet de mesurer ce défaut de commutativité. Il est défini de la manière suivante,

$$R : \begin{matrix} \Gamma(\mathcal{M}) \times \Gamma(\mathcal{M}) \times \Gamma(\mathcal{M}) \\ (X, Y, Z) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \Gamma(\mathcal{M}) \\ R(X, Y)Z = (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X, Y]})Z \end{matrix} \tag{6}$$

Pour comprendre géométriquement ce que mesure le tenseur de Riemann, on considère un petit parallélogramme qui possède donc 2 directions principales et un vecteur que l'on va déplacer en suivant les deux chemins possibles pour joindre deux sommets diagonalement opposés. Sur un plan, l'image de ce vecteur le long de chacun des chemins est identiques mais sur un espace courbe, les deux images seront différentes et c'est ce qui est mesuré par le tenseur de Riemann.

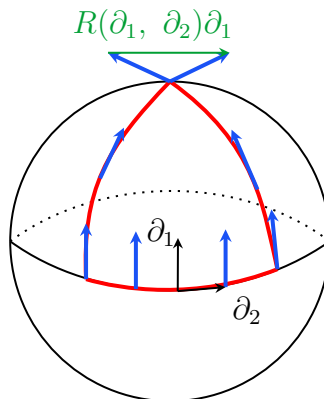


FIGURE 7 – Illustration de l'absence de commutativité mesurée par le tenseur de Riemann lors du transport parallèle d'un vecteur

Les coordonnées du tenseur de courbure se déduisent de la connaissance des symboles de Christoffel

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l \quad (7)$$

En effectuant la contraction du tenseur de Riemann sur le premier et le dernier indice on obtient le **tenseur de Ricci** d'ordre 2, dont l'expression en coordonnées est $Ric_{ij} = R_{\alpha ij}^\alpha$. Ce tenseur caractérise la courbure de la variété selon chaque direction en mesurant l'évolution du volume infinitésimal.

En contractant le tenseur de Ricci, on obtient la **courbure scalaire** dont l'expression est $S = R_i^i$. La courbure scalaire donne une information globale sur la courbure de la variété, elle représente la courbure moyenne [3].

3 Mouvement autour d'un trou noir

3.1 Introduction

L'anomalie de l'avance du périhélie de mercure était un problème qui mettait en défaut la théorie classique de Newton et qui a été résolu par l'avènement de la théorie relativiste d'Einstein. D'autres corps célestes tels que les trous noirs sont difficilement prévisibles par la théorie classique alors que la relativité général permet de décrire le mouvement de n'importe quel corps en son voisinage. Le fait que la lumière ne puisse pas s'échapper d'un trou noir et que la théorie de Newton ne prédise pas cela est un autre point important résolu par la relativité générale. Le point de vue relativiste adopté par Einstein est totalement différent de celui de Newton. Il conçoit que l'espace-temps est courbé et que les corps s'y déplacent, en quelque sorte, en ligne droite. Cet article se penchera sur la modélisation mathématique à l'aide des variétés pseudo-riemanniennes puis sur des simulations numériques du mouvement corps dans un espace-temps courbé. Il se concentre sur des espace-temps vide ou au voisinage d'un astre massif.

3.2 Modélisation mathématique

3.2.1 Contexte géométrique

Dans la suite, on se place sur des variété pseudo-riemanniennes, qui représentent l'espace-temps et notées (\mathcal{M}, g) . Si $\mathcal{M} = \mathbb{R}^4$, on se trouve dans un espace de Minkowski qui correspond à un espace-temps vide. On a aussi considéré $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^3 - \mathbf{B}(0, \frac{2GM}{c^2}))$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide, G la constante de gravitation et M la masse d'un unique astre central autour duquel on se place. Dans ce cas on introduit $R_s = \frac{2GM}{c^2}$ le rayon de Schwarzschild qui correspond au rayon en deçà duquel la lumière ne peut s'échapper de l'orbite gravitationnelle. Ces cas particuliers sont parmi les rares connus où l'on dispose de solutions analytiques pour g .

3.2.2 Ligne d'univers

Dans l'espace-temps, un corps se déplace le long d'une géodésique. Il en existe 3 genres [4] :

- lumière : $g(v, v) = 0$ lorsque la vitesse est celle de la lumière
- temps : $g(v, v) < 0$ lorsqu'un corps avance dans l'espace-temps
- spatiale : $g(v, v) > 0$ lorsqu'un corps recule dans l'espace-temps

pour tout vecteur v tangent à la géodésique. Un mobile se déplaçant dans l'espace temps suit une géodésique $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathcal{M}$, que l'on écrit $\gamma(\tau) = x^i \partial_i$ paramétrée par le temps propre du mobile et solution de l'équation des géodésiques

$$\forall k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \quad \ddot{x}^k(\tau) + \Gamma_{ij}^k(\gamma(\tau))x^i(\tau)x^j(\tau) = 0 \quad (8)$$

avec $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$ les symboles de Christoffel. Une fois que la métrique est déterminée, il ne reste plus qu'à résoudre cette équation.

3.2.3 Contenu de l'espace temps

L'espace-temps est courbé par la présence de masse dans l'univers. Le lien entre la courbure de la variété et le contenu de l'univers sera exposé dans la section suivante. Nous avons d'abord

besoin de définir le tenseur énergie impulsion $T_{\mu\nu}$ qui traduit la présence de matière dans l'univers sous forme d'énergie ou d'impulsion. Ce tenseur est nul dans le vide et diagonal dans un fluide parfait. Le tenseur énergie-impulsion décrit le contenu énergétique de l'univers. Par exemple T_{tt} désigne la quantité d'énergie qui traverse le temps au cours du temps, autrement dit la quantité d'énergie qui reste immobile dans l'espace au cours du temps. Au sein du soleil on aura :

$$T = \begin{pmatrix} \text{densité d'énergie} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{pression} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{pression} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{pression} \end{pmatrix}$$

3.2.4 Équation d'Einstein

Pour lier le contenu de l'univers, représenté par T , et la courbure, il faut se référer à l'équation d'Einstein :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Sg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (9)$$

où

- $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci.
- S est la courbure scalaire.
- $g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique.
- Λ est la constante cosmologique.
- $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie impulsion.

La constante cosmologique, mal comprise et traduisant l'effet de l'expansion de l'univers, est estimée à $1.088 \cdot 10^{-52}m^{-2}$, et elle sera négligée dans les solutions données qui suivent.

Ainsi cette équation fait le lien entre la courbure de l'espace-temps et son contenu. La résolution de cette équation permet d'obtenir une métrique que l'on peut utiliser pour résoudre l'équation des géodésiques. Une géodésique dans l'espace-temps est une ligne d'univers.

3.2.5 Résolution de l'équation d'Einstein

Dans le vide, le tenseur énergie impulsion T est nul. Une solution de (9) est la métrique de Minkowski [4] utilisée dans un espace-temps vide

$$g = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Lorsque l'on étudie un problème à symétrie sphérique -un astre purement massique au centre du repère-, une solution de (9) est la métrique de Schwarzschild [5]

$$g = \begin{pmatrix} -\left(c^2 - \frac{2GM}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (11)$$

3.2.6 Expression des symboles de Christoffel

Dans la suite, nous allons nous intéresser au mouvement d'un corps autour d'un trou noir. Il nous faut donc l'expression des symboles de Christoffel afin de résoudre l'équation des géodésique. On obtient les symboles suivants :

$$\Gamma_{ij}^0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{R_s}{2r(-R_s+r)} & 0 & 0 \\ \frac{R_s}{2r(-R_s+r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} \frac{R_s c^2 (r-R_s)}{2r^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_s}{2r(R_s-r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s - r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (R_s - r)\sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sin(2\theta)}{2} \end{pmatrix} \quad \Gamma_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tan(\theta)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tan(\theta)} \\ 0 & \frac{1}{r} & \frac{1}{\tan(\theta)} & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

3.3 Simulations numérique

3.3.1 Trajectoires autour d'un trou noir

Cette section s'attachera à présenter le résultat de nos simulations numérique autour d'un trou noir. Pour des raisons numériques, on considère $c = G = M = 1$.

Afin de résoudre les équations différentielles couplées, on utilise la fonction `solve_ivp` du module python `scipy` avec le schéma numérique RK45. Le système différentiel est présenté sous la forme suivante

$$\dot{Y} = F(Y) \quad (14)$$

avec $Y = {}^T (\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^4, x^1, \dots, x^4)$ et $\forall k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, [F(Y)]_k = -\Gamma_{ij}^k x^i x^j$ et $\forall k \in \llbracket 5, 7 \rrbracket, [F(Y)]_k = \dot{x}^k$

Comme on s'y attendrait, une particule sans vitesse spatiale initiale chute inéluctablement vers le trou noir. Cette condition initiale se traduit par $(\dot{x}^1(0), \dot{x}^2(0), \dot{x}^3(0), \dot{x}^4(0)) = (1, 0, 0, 0)$. La figure 9 montre la dilatation du temps lorsque l'objet approche le trou noir.

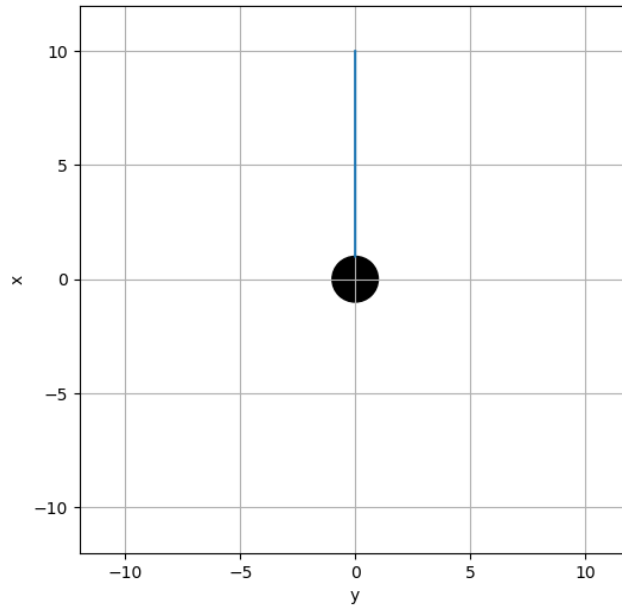
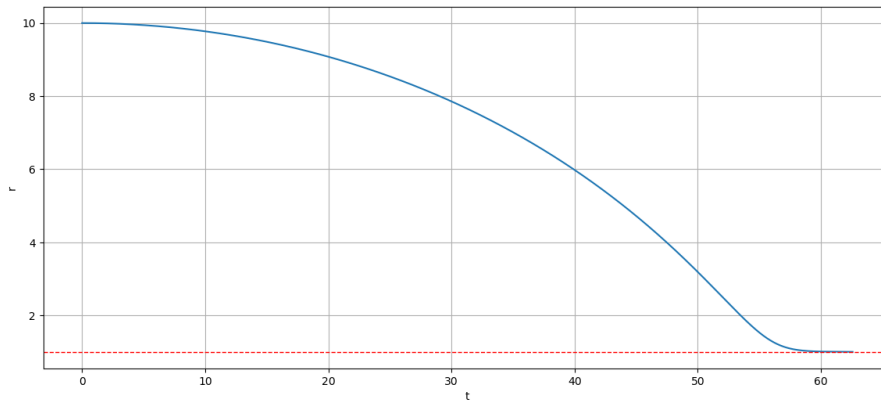


FIGURE 8 – Chute d'une particule vers le trou noir

FIGURE 9 – Évolution de r en fonction du temps t

La simulation suivante présente un lancé de 30 corps ayant des vitesses initiales différentes.

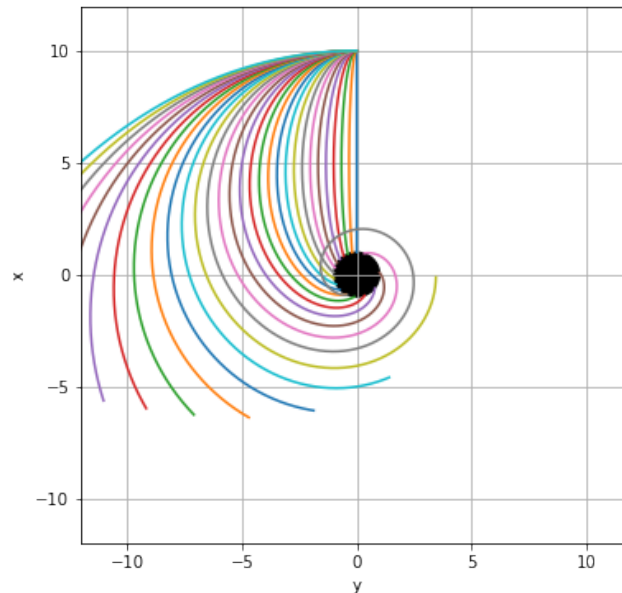


FIGURE 10 – Lancé de 30 particules ayant des vitesses spatiales non nulles

3.4 Conclusion

Cet article a mis en évidence l'importance de la géométrie différentielle pour la relativité générale et a permis la simulation du mouvement des corps autour d'un trou noir. Grâce à cette théorie, qui décrit la gravitation comme une courbure de l'espace-temps, il est possible de modéliser avec précision l'interaction gravitationnelle et son effet sur la propagation des corps et de la lumière. Cette théorie est compatible et surtout complète la théorie classique de Newton en considérant que tout corps se déplace dans l'univers suivant l'équivalent d'une droite dans un espace-temps courbé. L'équation d'Einstein permet d'obtenir une métrique permettant de caractériser les géodésiques de l'espace-temps pour finalement en déduire les lignes d'univers.

4 Annexes

```

1 from matplotlib import pyplot as plt, patches
2 import math
3 import sympy
4 import numpy as np
5 from scipy.integrate import solve_ivp
6
7 #inititalize the symbols
8 t = sympy.Symbol('t')
9 r = sympy.Symbol('r')
10 theta = sympy.Symbol('theta')
11 phi = sympy.Symbol('phi')
12 c = sympy.Symbol('c')
13 R_s = sympy.Symbol('R_s')
14 x = [t,r,theta,phi]
15
16 #inititalize the metric
17 g = sympy.Matrix([[ -c*c*(1-R_s/r), 0, 0, 0 ], [ 0, 1/(1-R_s/r), 0, 0 ], [ 0, 0, r
    **2, 0 ], [ 0, 0, 0, r**2*sympy.sin(theta)**2 ]])
18 g_inv = g.inv()
19
20 #inititalize the christoffel symbols
21 chris = []
22 for k in range(4):
23     chris.append([])
24     for i in range(4):
25         chris[k].append([])
26         for j in range(4):
27             #note that in the case of Schwarzschild metric, g is diagonal,
28             #so the christoffel symbols are simplified
29             chris[k][i].append(sympy.simplify(0.5*g_inv[k,k]*(sympy.diff(g[k
30             ],i),x[j])+sympy.diff(g[k,j],x[i])-sympy.diff(g[i,j],x[k])))
31
32
33 chris_fun = sympy.lambdify((c, R_s, r, theta), chris, modules="numpy")
34
35 #solvable form of the geodesic equation
36 # return geodesic equation's right hand side
37 def F(t, y):
38     x = np.array(y[0:4])
39     xp = np.array(y[4:8])
40     right = []
41     for i in range(4):
42         right.append(sympy.simplify(0))
43         for alpha in range(4):
44             for beta in range(4):
45                 right[i] = right[i] - chris_fun(1, 1, x[1], x[2])[i][alpha][
46                 beta]*xp[alpha]*xp[beta]
47     return np.concatenate((xp, right))
48
49 def get_lightcurve_temporal_speed(r_s, theta_s, phi_s, c, G, M, r, theta):
50     return ((1/(1-2*G*M/(r*c**2))) + r**2 + r**2*math.sin(theta))/(c**2-2*G*
51     M/r)
52
53 get_lightcurve_temporal_speed(0, np.pi/4, 0, 1, 1, 1, 10, np.pi/2)
54
55 T = 500
56 t_eval = np.linspace(0, T, int(T * 123 + 1))
57 initial_value = [0, 10, np.pi/2, 0, 1, 0, 0.015, 0]

```

```

54
55 sol = solve_ivp(F, [0, T], initial_value, t_eval=t_eval)
56
57 plt.figure(figsize=(14, 6),)
58 plt.plot(sol.y[0], sol.y[1])
59 ax = plt.gca()
60 ax.axhline(1, color="red", ls='--', lw=1)
61 plt.grid()
62 plt.xlabel('t')
63 plt.ylabel('r')
64
65 plt.figure(figsize=(6, 6),)
66 plt.plot(sol.y[1]*np.cos(sol.y[2]), sol.y[1]*np.sin(sol.y[2]))
67 plt.grid()
68 plt.xlim(-12, 12)
69 plt.ylim(-12, 12)
70 ax = plt.gca()
71 circle1 = patches.Circle((0, 0), radius=1, color='black')
72 ax.add_patch(circle1)
73 plt.xlabel('y')
74 plt.ylabel('x')
75
76 T = 500
77 t_eval = np.linspace(0, T, int(T * 123 + 1))
78 initial_value = [0, 10, np.pi/2, 0, 1, 0, 0.02, 0]
79
80 sol = solve_ivp(F, [0, T], initial_value, t_eval=t_eval)
81 plt.figure(figsize=(6, 6),)
82 plt.plot(sol.y[1]*np.cos(sol.y[2]), sol.y[1]*np.sin(sol.y[2]))
83 plt.grid()
84 plt.xlim(-12, 12)
85 plt.ylim(-12, 12)
86 ax = plt.gca()
87 circle1 = patches.Circle((0, 0), radius=1, color='black')
88 ax.add_patch(circle1)
89 plt.xlabel('y')
90 plt.ylabel('x')
91
92 T = 500
93 t_eval = np.linspace(0, T, int(T * 123 + 1))
94 initial_value = [0, 10, np.pi/2, 0, 0.5, 0, 0, 0]
95
96 sol = solve_ivp(F, [0, T], initial_value, t_eval=t_eval)
97 plt.figure(figsize=(6, 6),)
98 plt.plot(sol.y[1]*np.cos(sol.y[2]), sol.y[1]*np.sin(sol.y[2]))
99 plt.grid()
100 plt.xlim(-12, 12)
101 plt.ylim(-12, 12)
102 ax = plt.gca()
103 circle1 = patches.Circle((0, 0), radius=1, color='black')
104 ax.add_patch(circle1)
105 plt.xlabel('y')
106 plt.ylabel('x')
107
108 T = 100
109 t_eval = np.linspace(0, T, int(T * 123 + 1))
110
111 sol = solve_ivp(F, [0, T], initial_value, t_eval=t_eval)
112 plt.figure(figsize=(6, 6))
113 plt.grid()

```

```
114 plt.xlim(-12, 12)
115 plt.ylim(-12, 12)
116 ax = plt.gca()
117 circle1 = patches.Circle((0, 0), radius=1, color='black')
118 ax.add_patch(circle1)
119 plt.xlabel('y')
120 plt.ylabel('x')
121
122
123 for i in range(30):
124     initial_value = [0, 10, np.pi/2, 0, 1, 0, 0.001*i, 0]
125     sol = solve_ivp(F, [0, T], initial_value, t_eval=t_eval)
126     plt.plot(sol.y[1]*np.cos(sol.y[2]), sol.y[1]*np.sin(sol.y[2]))
127
128 #particule sans vitesse spatiale initiale
129 T = 50000
130 t_eval = np.linspace(0, T, int(T * 123 + 1))
131 initial_value = [0, 10, np.pi/2, 0, 1, 0, 0.024, 0]
132
133 sol = solve_ivp(F, [0, T], initial_value, t_eval=t_eval)
134 plt.figure(figsize=(6, 6))
135 plt.grid()
136 plt.xlim(-20, 20)
137 plt.ylim(-20, 20)
138 ax = plt.gca()
139 circle1 = patches.Circle((0, 0), radius=1, color='black')
140 ax.add_patch(circle1)
141 plt.xlabel('y')
142 plt.ylabel('x')
143 plt.plot(sol.y[1]*np.cos(sol.y[2]), sol.y[1]*np.sin(sol.y[2]))
144
145 plt.figure(figsize=(14, 6),)
146 plt.plot(sol.y[0], sol.y[1])
147 ax = plt.gca()
148 ax.axhline(1, color="red", ls='--', lw=1)
149 plt.grid()
150 plt.xlabel('t')
151 plt.ylabel('r')
```

Références

- [1] John M. LEE : *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2000.
- [2] Marc TROYANOV : *Notes du cours d'Introduction à la Géométrie Riemannienne*. EPFL. 2018.
- [3] John M. LEE : *Introduction to Riemannian Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer International Publishing, 2019.
- [4] Éric GOURGOULHON : *Relativité générale*. Observatoire de Paris, Universités Paris 6, Paris 7 et Paris 11, École Normale Supérieure. 2013.
- [5] David SÉNÉCHAL : *Relativité générale*. Université de Sherbrooke. 2022.